



TITLE:

# Hardy spaces and preduals of Campanato spaces (Harmonic, Analytic function spaces and Linear Operators, II)

AUTHOR(S):

中井, 英一

---

CITATION:

中井, 英一. Hardy spaces and preduals of Campanato spaces (Harmonic, Analytic function spaces and Linear Operators, II). 数理解析研究所講究録 2002, 1277: 67-77

ISSUE DATE:

2002-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/42321>

RIGHT:

# Hardy spaces and preduals of Campanato spaces

大阪教育大学 教育学部 中井 英一 (Eiichi Nakai)

Department of Mathematics

Osaka Kyoiku University

enakai@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

## 1. 始めに

Hardy 空間  $H^p$  を一般化した函数空間を定義して、この空間の相対空間が Campanato 空間になることを示す。この函数空間の導入は、Example 2.2 のように、 $H^1$  に非常に近い空間の性質を調べるための手がかりになると考える。この空間の導入のきっかけは、次の fractional integral の有界性の一般化である。

Fractional integral  $I_\alpha$  ( $0 < \alpha < n$ );

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{|x-y|^\alpha}{|x-y|^n} dy$$

について、次の有界性が知られている。

**Theorem 1.1** (Hardy-Littlewood-Sobolev).

$$1 < p < q < \infty, \quad -n/p + \alpha = -n/q$$

のとき

$$I_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \quad bdd.$$

函数  $\rho : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  に対して

$$I_\rho f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy$$

とおく。ただし  $\rho$  は

$$(1.1) \quad \int_0^1 \frac{\rho(t)}{t} dt < +\infty,$$

$$(1.2) \quad \frac{1}{A_1} \leq \frac{\rho(s)}{\rho(r)} \leq A_1 \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq \frac{s}{r} \leq 2,$$

$$(1.3) \quad \frac{\rho(r)}{r^n} \leq A_2 \frac{\rho(s)}{s^n} \quad \text{for} \quad s \leq r,$$

を満たすとする。 $A_1, A_2 > 0$  は  $r, s > 0$  によらない定数である。 $\rho(r) = r^\alpha$ ,  $0 < \alpha < n$  ならば、 $I_\rho$  は通常の fractional integral  $I_\alpha$  である。

Theorem 1.1 は、この  $I_\rho$  により、Theorem 1.2 のように、Orlicz 空間上に一般化される。

$\mathcal{F}$  を、連続な増加函数  $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  で全単射なものの全体とする。 $\Phi \in \mathcal{F}$  ならば

$$\Phi(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi(r) = +\infty$$

である。 $\Phi(+\infty) = +\infty$  としておく。

$\Phi \in \mathcal{F}$  が凸のとき、 $\Phi$  で定義される Orlicz 空間を  $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$  と書く。すなわち

$$L^\Phi(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\epsilon |f(x)|) dx < +\infty \text{ for some } \epsilon > 0 \right\},$$

$$\|f\|_{L^\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left( \frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}.$$

$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$  はノルム  $\|f\|_{L^\Phi}$  により Banach 空間になる。 $\Phi$  が次の条件を満たすとき、 $\nabla_2$ -condition を満たすと言い、 $\Phi \in \nabla_2$  と書く。

$$\exists k > 1 \quad \text{s.t.} \quad \Phi(r) \leq \frac{1}{2k} \Phi(kr), \quad r \geq 0.$$

また  $\Phi$  に対して、その complementary function を次のように定義する。

$$\tilde{\Phi}(r) = \sup\{rs - \Phi(s) : s \geq 0\}, \quad r \geq 0.$$

**Theorem 1.2** ([3]).  $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}$  が凸で、 $\Phi \in \nabla_2$  とする。

$$(1.4) \quad \Phi^{-1} \left( \frac{1}{r^n} \right) \int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt \leq C \Psi^{-1} \left( \frac{1}{r^n} \right), \quad r > 0,$$

$$(1.5) \quad \int_r^{+\infty} \tilde{\Phi} \left( \frac{\rho(t)}{C \int_0^r (\rho(s)/s) ds \Phi^{-1}(1/r^n) t^n} \right) t^{n-1} dt \leq C, \quad r > 0$$

ならば、

$$I_\rho : L^\Phi(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\Psi(\mathbb{R}^n) \quad \text{bdd.}$$

なお、この定理において、 $\Phi(r) = r^p$ ,  $\Psi(r) = r^q$ ,  $\rho(r) = r^\alpha$  の場合は、(1.4) は  $-n/p + \alpha = -n/q$  と同値である。

Fractional integral  $I_\alpha$  については、Figure 1 の有界性が知られている。

ここでは、Figure 1 を  $I_\rho$  に関する連続性に一般化するため、Hardy 空間  $H^p$  を一般化した函数空間を定義する。その際、

$$-n/p + \alpha = -n/q$$

の関係を、

$$\Phi^{-1} \left( \frac{1}{r^n} \right) \int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt \leq C \Psi^{-1} \left( \frac{1}{r^n} \right), \quad r > 0$$

に置き換えて成り立つようにすることが目標である。

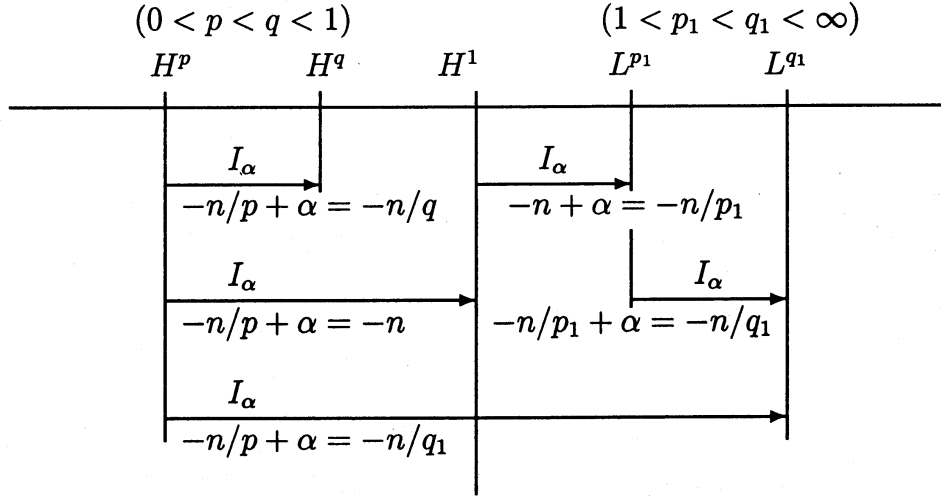


FIGURE 1. Boundedness of fractional integrals

## 2. 定義と結果

$\Phi \in \mathcal{F}$  のうち、

$$\Phi(r)/r^{n/(n+1)} \text{ is almost increasing}$$

であるものの全体を  $\mathcal{F}_0$  で表す。

**Definition 2.1.**  $\Phi \in \mathcal{F}_0$ ,  $1 < q \leq \infty$  とする。 $\mathbb{R}^n$  上の関数  $a$  が次の条件を満たすとき  $(\Phi, q)$ -atom という。

$$\exists B, \text{ ball, s.t. } \begin{cases} \text{supp } a \subset B, \\ \|a\|_q \leq |B|^{1/q} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right), \\ \int a(x) dx = 0. \end{cases}$$

ここで、 $|B|$  は ball  $B$  の Lebesgue 測度である。

**Definition 2.2.**  $\Phi \in \mathcal{F}_0$  とし、 $U \in \mathcal{F}$  は凹関数とする。 $f \in \mathcal{D}'$  のうち、 $(\Phi, q)$ -atom の列  $\{a_j\}$  と  $\sum_j U(|\lambda_j|) < +\infty$  を満たす数列  $\{\lambda_j\}$  が存在して、

$$f = \sum_j \lambda_j a_j \text{ in } \mathcal{D}'$$

と表されるものの全体からなる空間を  $H_U^{\Phi, q}(\mathbb{R}^n)$  と定義する。また

$$\|f\|_{H_U^{\Phi, q}} = \inf \left\{ U^{-1} \left( \sum_j U(|\lambda_j|) \right) : f = \sum_j \lambda_j a_j \text{ in } \mathcal{D}' \right\}$$

とおく。ただし、下限は  $f$  の表現すべてにわたるものとする。

$q = \infty$  のとき、 $H_U^{\Phi, q}(\mathbb{R}^n) = H_U^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$  と書く。

$\Phi(r) = 1/U(1/r)$  のとき、 $H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n) = H^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)$  と書く。

$q = \infty$  かつ  $\Phi(r) = 1/U(1/r)$  のとき、 $H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n) = H^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$  と書く。

$d(f, g) = U(\|f - g\|_{H_U^{\Phi,q}})$  は距離になり、 $H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)$  は完備な線形距離空間である。

$I(r) = r$  とおくと、 $\|f\|_{H_I^{\Phi,q}}$  はノルムとなり、 $H_I^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)$  は Banach 空間である。

$\Phi(r) = r^p$ ,  $n/(n+1) < p \leq 1$ , ならば  $H^{\Phi}(\mathbb{R}^n) = H^p(\mathbb{R}^n)$  である。

$$1 < q_1 < q_2 \leq \infty \Rightarrow H_U^{\Phi,q_2}(\mathbb{R}^n) \subset H_U^{\Phi,q_1}(\mathbb{R}^n),$$

$$\Psi(r) \leq \Phi(Cr) \text{ for all } r > 0 \Rightarrow H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n) \subset H_U^{\Psi,q}(\mathbb{R}^n),$$

$$V(r) \leq CU(r) \text{ for } 0 \leq r \leq 1 \Rightarrow H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n) \subset H_V^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n),$$

$$\text{任意の凹関数 } U \text{ に対して } H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n) \subset H_I^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n).$$

ここで、埋め込みはいずれも連続である。 $1 < q \leq \infty$  とする。

$$L_{\text{comp}}^{q,0}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{\text{comp}}^q(\mathbb{R}^n) : \int f(x) dx = 0 \right\}$$

とおくと、 $L_{\text{comp}}^{q,0}(\mathbb{R}^n)$  は  $H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)$  で稠密である。

$\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  とする。次の条件を doubling condition という。

$$\exists C > 0 \text{ s.t. } \frac{1}{C} \leq \frac{\phi(s)}{\phi(r)} \leq C \text{ for } \frac{1}{2} \leq \frac{s}{r} \leq 2.$$

**Definition 2.3.**  $1 \leq p < \infty$  で、 $\phi$  が doubling condition を満たすとき、Campanato 空間  $\mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) &= \{f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}} < +\infty\}, \\ \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}} &= \sup_{B=B(z,r)} \frac{1}{\phi(r)} \left( \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B|^p dx \right)^{1/p}, \\ f_B &= \frac{1}{|B|} \int_B f(x) dx. \end{aligned}$$

ここで、 $B(z, r)$  は中心  $z \in \mathbb{R}^n$  半径  $r > 0$  の ball である。

$\mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)$  は、定数を法とした空間として、ノルム  $\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}$  により Banach 空間になる。

$$1 \leq p_1 < p_2 < \infty \Rightarrow \mathcal{L}_{p_2,\phi}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_{p_1,\phi}(\mathbb{R}^n)$$

$$\phi(r) \leq C\psi(r) \text{ for all } r > 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n).$$

ここで、埋め込みはいずれも連続である。特に、

$$\phi \sim \psi \Rightarrow \mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n), \quad \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}} \sim \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\psi}}.$$

$\phi$  が almost increasing ならば、 $1 < p < \infty$  に対して

$$\mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_{1,\phi}(\mathbb{R}^n), \quad \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}} \sim \|f\|_{\mathcal{L}_{1,\phi}}.$$

この空間を  $\text{BMO}_\phi(\mathbb{R}^n)$  と書く。さらに  $\phi \equiv 1$  ならば、 $\text{BMO}(\mathbb{R}^n)$  である。

**Theorem 2.1.**  $1 < q \leq \infty$ ,  $1/q + 1/q' = 1$ ,  $\Phi \in \mathcal{F}_0$  とし、 $r^{n/q}\Phi^{-1}(1/r^n)$  は almost decreasing とする。また  $U \in \mathcal{F}$  は凹関数で

$$\sup_{0 < s < 1} \frac{U(rs)}{U(s)} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

とする。このとき

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n \Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right)} \Rightarrow \left(H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)\right)^* = \mathcal{L}_{q',\phi}(\mathbb{R}^n).$$

**Remark 2.1.**  $B = B(z, r)$  のとき、

$$\phi(r) \sim \frac{1}{|B| \Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right)}.$$

**Example 2.1.**  $\Phi(r) = r$  のとき、 $\phi(r) \equiv 1$ 。このとき

$$\left(H_U^{1,q}(\mathbb{R}^n)\right)^* = \text{BMO}(\mathbb{R}^n).$$

**Example 2.2.**  $\beta \in \mathbb{R}$  に対して、 $\Phi_\beta \in \mathcal{F}$ ,

$$\Phi_\beta(r) = \begin{cases} r (\log(1/r))^{-\beta} & \text{for small } r, \\ r (\log r)^\beta & \text{for large } r \end{cases}$$

とおくと、 $\beta < 0$  ならば  $\Phi_\beta$  は凹関数、 $\beta > 0$  ならば  $\Phi_\beta$  は凸関数である。このとき

$$\Phi_\beta^{-1}(r) \sim \begin{cases} r (\log(1/r))^\beta & \text{for small } r, \\ r (\log r)^{-\beta} & \text{for large } r. \end{cases}$$

$$\Phi_\beta^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \sim \begin{cases} r^{-n} (\log(1/r))^{-\beta} & \text{for small } r, \\ r^{-n} (\log r)^\beta & \text{for large } r. \end{cases}$$

そこで

$$\phi_\beta(r) = \frac{1}{r^n \Phi_\beta^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right)}$$

とおくと、

$$\phi_\beta(r) \sim \begin{cases} (\log(1/r))^\beta & \text{for small } r, \\ (\log r)^{-\beta} & \text{for large } r. \end{cases}$$

$\beta < 0$  ならば  $\phi_\beta$  は almost increasing であり、

$$\left(H_U^{\Phi_\beta,q}(\mathbb{R}^n)\right)^* = \text{BMO}_{\phi_\beta}(\mathbb{R}^n).$$

$\beta > 0$  ならば  $\phi_\beta$  は almost decreasing であり、

$$\left(H_U^{\Phi, q}(\mathbb{R}^n)\right)^* = \mathcal{L}_{q', \phi_\beta}(\mathbb{R}^n).$$

**Proposition 2.2.**  $\Phi \in \mathcal{F}_0$  とし、 $U \in \mathcal{F}$  は凹とする。

$$\begin{aligned} \frac{1}{U^{-1}(Cr)} &\leq \Phi^{-1}\left(\frac{1}{r}\right) \leq \frac{U^{-1}\left(\frac{Cs}{r}\right)}{U^{-1}(s)} \quad \text{for } 0 < s \leq r < +\infty, \\ U(rs) &\leq CU(r)U(s) \quad \text{for } 0 < r, s \leq 1 \end{aligned}$$

ならば

$$H_U^{\Phi, q}(\mathbb{R}^n) = H_U^{\Phi, \infty}(\mathbb{R}^n).$$

**Example 2.3.**  $n/(n+1) \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$  とし、

$$\Phi(r) = 1/U(1/r) = \begin{cases} r^{p_1} & \text{for small } r, \\ r^{p_2} & \text{for large } r, \end{cases}$$

とおく。このとき

$$H^{\Phi, q}(\mathbb{R}^n) = H^{\Phi, \infty}(\mathbb{R}^n).$$

以下の定理では、函数  $\rho: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  は、(1.1)–(1.3) および

$$\left| \frac{\rho(r)}{r^n} - \frac{\rho(s)}{s^n} \right| \leq C|r-s| \frac{\rho(r)}{r^{n+1}} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \frac{s}{r} \leq 2$$

を満たすとする。また、 $q = \infty$  とする。

**Theorem 2.3.**  $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}_0$  とし、 $U, V \in \mathcal{F}$  は凹とする。

$$(2.1) \quad \Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt \leq C \Psi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right), \quad r > 0,$$

$$(2.2) \quad V(rs) \leq CV(r)U(s), \quad 0 \leq r, s \leq 1,$$

かつ、 $0 < \exists \theta < 1$  s.t.

$$\begin{aligned} \int_r^\infty V \left( \left( \frac{\Psi^{-1}(1/t^n)}{\Psi^{-1}(1/r^n)} \right)^{(1/\theta)-1} \right) t^{-1} dt &\leq C, \quad r > 0, \\ \int_r^{+\infty} t^n \left( \Psi^{-1}\left(\frac{1}{t^n}\right) \right)^{1/\theta} t^{-1} dt &\leq Cr^n \left( \Psi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \right)^{1/\theta}, \quad r > 0, \\ \frac{\rho(r)}{r^{n+1}} \left( \Psi\left(\frac{1}{r^n}\right) \right)^{-1/\theta} &\text{ is almost decreasing} \end{aligned}$$

を満たすとき、 $I_\rho: H_U^\Phi(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_V^\Psi(\mathbb{R}^n)$  は連続である。

(2.2) より、

$$\forall C_1 > 0 \exists C_2 > 0 \quad \text{s.t.} \quad 0 < s, t \leq C_1 \Rightarrow V(st) \leq C_2 V(s)U(t)$$

が成り立つ。

**Theorem 2.4.**  $\Phi \in \mathcal{F}_0$  とし、 $\Psi, U \in \mathcal{F}$  で、 $\Psi$  は凸、 $U$  は凹とする。

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt &\leq C \Psi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right), \quad r > 0, \\ \int_r^{+\infty} \Psi\left(\frac{\rho(t)r^{n+1}\Phi^{-1}(1/r^n)}{t^{n+1}}\right) t^{n-1} dt &\leq C, \quad r > 0 \end{aligned}$$

を満たすとき、 $I_\rho: H_U^\Phi(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\Psi(\mathbb{R}^n)$  は連続である。

**Example 2.4.**  $\alpha > 0$  に対して

$$\rho_\alpha(r) = \begin{cases} (\log(1/r))^{-\alpha-1} & \text{for small } r, \\ (\log r)^{\alpha-1} & \text{for large } r \end{cases}$$

とおくと、

$$\int_0^r \frac{\rho_\alpha(t)}{t} dt \sim \begin{cases} (\log(1/r))^{-\alpha} & \text{for small } r, \\ (\log r)^\alpha & \text{for large } r. \end{cases}$$

$\Phi_\beta$  を Example 2.2 で定義したものとすると、

$$\Phi_\beta^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \int_0^r \frac{\rho_\alpha(t)}{t} dt \sim \Phi_{\beta+\alpha}^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right).$$

また、Theorems 2.3, 2.4 のほかの条件も満たすことから、Figure 2 の連続性が得られる。

### 3. 証明の概略

**Lemma 3.1.**

$$\sup_{0 < s < 1} \frac{U(rs)}{U(s)} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

のとき、 $\ell \in \left(H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)\right)^*$  ならば、

$$\|\ell\| = \sup \left\{ |\ell(f)| : \|f\|_{H_U^{\Phi,q}} \leq 1 \right\} < +\infty.$$

**Theorem 2.1 の証明.**  $g \in \mathcal{L}_{q',\phi}(\mathbb{R}^n)$  とする。 $(\Phi, q)$ -atom  $a$  に対して、 $ag \in L^1(\mathbb{R}^n)$  かつ

$$\int a(x)g(x) dx = \int a(x)(g(x) - g_B) dx.$$



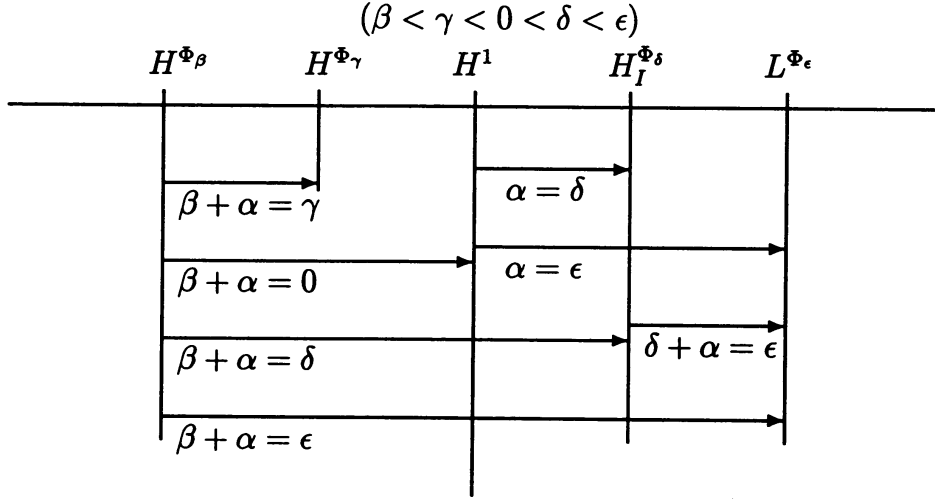


FIGURE 2. Continuity of generalized fractional integrals

ただし、 $\text{supp } a \subset B = B(z, r)$  とする。このとき、

$$\begin{aligned}
 \left| \int a(x)g(x) dx \right| &\leq \|a\|_q \left( \int_B |g(x) - g_B|^{q'} dx \right)^{1/q'} \\
 &\leq |B|^{1/q} \Phi^{-1} \left( \frac{1}{|B|} \right) \left( \int_B |g(x) - g_B|^{q'} dx \right)^{1/q'} \\
 &= |B| \Phi^{-1} \left( \frac{1}{|B|} \right) \left( \frac{1}{|B|} \int_B |g(x) - g_B|^{q'} dx \right)^{1/q'} \\
 &\sim \frac{1}{\phi(r)} \left( \frac{1}{|B|} \int_B |g(x) - g_B|^{q'} dx \right)^{1/q'} \leq \|g\|_{\mathcal{L}_{q',\phi}}.
 \end{aligned}$$

$f \in L_{\text{comp}}^{q,0}(\mathbb{R}^n)$  のとき、 $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . また

$$f = \sum_j \lambda_j a_j, \quad U^{-1} \left( \sum_j U(|\lambda_j|) \right) \leq 2 \|f\|_{H_U^{\Phi,q}}$$

とすると、

$$\int f(x)g(x) dx = \sum_j \lambda_j \int a_j(x)g(x) dx,$$

かつ

$$\begin{aligned}
 \left| \int f(x)g(x) dx \right| &\leq C \left( \sum_j |\lambda_j| \right) \|g\|_{\mathcal{L}_{q',\phi}} \\
 &\leq CU^{-1} \left( \sum_j U(|\lambda_j|) \right) \|g\|_{\mathcal{L}_{q',\phi}} \leq 2C \|f\|_{H_U^{\Phi,q}} \|g\|_{\mathcal{L}_{q',\phi}}.
 \end{aligned}$$

逆に  $\ell \in \left(H_U^{\Phi, q}(\mathbb{R}^n)\right)^*$  とする。  $B = B(z, r)$  を任意にとって固定する。  $f \in L^{q,0}(B)$  に対して、

$$a(x) = \begin{cases} |B|^{1/q} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \|f\|_q^{-1} f(x) & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

とおくと  $a$  は  $(\Phi, q)$ -atom になる。従って

$$|\ell(a)| \leq \|\ell\|,$$

すなわち

$$\frac{|\ell(f)|}{\|f\|_q} \leq \|\ell\| \left( |B|^{1/q} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \right)^{-1} \sim \|\ell\| \phi(r) |B|^{1/q'}, \quad f \in L^{q,0}(B).$$

$L^{q,0}(B)$  は  $L^q(B)$  の部分空間だから Hahn-Banach の定理により、

$$\|\ell\|_{(L^q(B))^*} \leq C \|\ell\| \phi(r) |B|^{1/q'},$$

すなわち

$$\exists h^B \in L^{q'}(B) \quad \text{s.t.}$$

$$\ell(f) = \int_B f(x) h^B(x) dx, \quad \|h^B\|_{L^{q'}(B)} \leq C \|\ell\| \phi(r) |B|^{1/q'}.$$

$g^B(x) = h^B(x) - (h^B)_B$ ,  $x \in B$ , とおくと

$$(g^B)_B = 0, \quad \|g^B\|_{L^{q'}(B)} \leq C \|\ell\| \phi(r) |B|^{1/q'}$$

$$\ell(f) = \int_B f(x) h^B(x) dx = \int_B f(x) g^B(x) dx, \quad f \in L^{q,0}(B).$$

各 ball  $B$  に対して以上のように  $g^B$  が定まる。族  $\{g^B\}_B$  に対して、

$$\exists g \in L_{\text{loc}}^{q'}(\mathbb{R}^n) \quad \text{s.t.} \quad \text{for each ball } B, \quad g - g_B = g^B \quad \text{on } B.$$

このとき

$$g \in \mathcal{L}_{q', \phi}(\mathbb{R}^n), \quad \|g\|_{\mathcal{L}_{q', \phi}} \leq C \|\ell\|,$$

$$\ell(f) = \int f(x) g(x) dx \quad \text{for } f \in L_{\text{comp}}^{q,0}(\mathbb{R}^n). \quad \square$$

**Definition 3.1.**  $\Phi \in \mathcal{F}_0$  とし、  $0 < \theta < 1$  とする。  $\mathbb{R}^n$  上の関数  $M$  が、

$$\exists z \in \mathbb{R}^n \quad \text{s.t.} \quad \|M\|_{\infty}^{1-\theta} \left\| \left( \Phi^{-1}(|\cdot - z|^{-n}) \right)^{-1/\theta} M \right\|_{\infty}^{\theta} < +\infty,$$

$$\int M(x) dx = 0$$

であるとき  $M$  を  $(\Phi, \infty, \theta)$ -molecule という。また、

$$\mathcal{N}(M) = \mathcal{N}^{\Phi, \infty, \theta}(M) = \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \|M\|_{\infty}^{1-\theta} \left\| (\Phi^{-1}(|\cdot - z|^{-n}))^{-1/\theta} M \right\|_{\infty}^{\theta}$$

とおく。

**Proposition 3.2.**  $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}_0$  とし、 $U, V \in \mathcal{F}$  は凹とする。

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt \leq C \Psi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right), \quad r > 0,$$

$$0 < \exists \theta < 1 \quad \text{s.t.} \quad \frac{\rho(r)}{r^{n+1}} \left( \Psi\left(\frac{1}{r^n}\right) \right)^{-1/\theta} \text{ is almost decreasing}$$

とする。このとき、 $a$  が  $(\Phi, \infty)$ -atom ならば  $I_{\rho}a$  は  $(\Psi, \infty, \theta)$ -molecule であり、 $\mathcal{N}(I_{\rho}a) \leq C$  が成り立つ。ただし、 $C$  は  $(\Phi, \infty)$ -atom  $a$  によらない定数である。

**Proposition 3.3.**  $\Psi \in \mathcal{F}_0$  とし、 $V \in \mathcal{F}$  は凹とする。

$$0 < \exists \theta < 1 \quad \text{s.t.} \quad \int_r^{\infty} V\left(\left(\frac{\Psi^{-1}(1/t^n)}{\Psi^{-1}(1/r^n)}\right)^{(1/\theta)-1}\right) t^{-1} dt \leq C, \quad r > 0$$

とする。このとき、 $M$  が  $(\Psi, \infty, \theta)$ -molecule ならば  $M \in H_V^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$  であり、

$$\forall C_1 > 0 \exists C_2 > 0 \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{N}^{\Psi, \infty, \theta}(M) \leq C_1 \Rightarrow \|M\|_{H_V^{\Psi}} \leq C_2.$$

**Theorem 2.3 の証明.**

$$f \in L_{\text{comp}}^{\infty, 0}(\mathbb{R}^n), \quad f = \sum_j \lambda_j a_j, \quad U^{-1}\left(\sum_j U(|\lambda_j|)\right) \leq 2\|f\|_{H_U^{\Phi}},$$

$$\|f\|_{H_U^{\Phi}} \leq 1.$$

とする。Proposition 3.2 と Proposition 3.3 により、

$$I_{\rho}a_j = \sum_k \lambda_{j,k} a_{j,k}, \quad a_{j,k} \text{ are } (\Psi, \infty)\text{-atoms}, \quad V^{-1}\left(\sum_k V(|\lambda_{j,k}|)\right) \leq C.$$

このとき、

$$|\lambda_j| \leq 2, \quad |\lambda_{j,k}| \leq C.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} I_{\rho}f &= \sum_j \lambda_j I_{\rho}a_j = \sum_j \lambda_j \sum_k \lambda_{j,k} a_{j,k} = \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_{j,k} a_{j,k}, \\ \sum_{j,k} V(|\lambda_j \lambda_{j,k}|) &\leq C \sum_{j,k} U(|\lambda_j|) V(|\lambda_{j,k}|) \\ &\leq C' \sum_j U(|\lambda_j|) \leq 2C' U\left(\|f\|_{H_U^{\Phi}}\right). \end{aligned}$$

$$V\left(\|I_\rho f\|_{H_V^\Psi}\right) \leq C U\left(\|f\|_{H_V^\Phi}\right) \quad \text{for } \|f\|_{H_V^\Phi} \leq 1. \quad \square$$

**Proposition 3.4.** *Theorem 2.4 の仮定のもとで、 $a$  が  $(\Phi, \infty)$ -atom ならば*

$$I_\rho a \in L^\Psi(\mathbb{R}^n), \quad \text{and} \quad \|I_\rho a\|_{L^\Psi} \leq C.$$

ただし、 $C$  は  $(\Phi, \infty)$ -atom  $a$  によらない定数である。

**Theorem 2.4 の証明.**  $U(r) = I(r) = r$  の場合を示せばよい。

$$f \in L_{\text{comp}}^{\infty,0}(\mathbb{R}^n), \quad f = \sum_j \lambda_j a_j, \quad \sum_j |\lambda_j| \leq 2\|f\|_{H_I^\Phi}.$$

とする。Proposition 3.4 より、

$$I_\rho f = \sum_j \lambda_j I_\rho a_j, \quad \text{and}$$

$$\|I_\rho f\|_{L^\Psi} \leq \sum_j |\lambda_j| \|I_\rho a_j\|_{L^\Psi} \leq C \sum_j |\lambda_j| \leq 2C\|f\|_{H_I^\Phi}. \quad \square$$

#### REFERENCES

- [1] J. García-Cuerva and J.L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland, 1985.
- [2] S. Lu, M. H. Taibleson and G. Weiss, *Spaces generated by blocks*, Publishing House of Beijing Normal University, 1989.
- [3] E. Nakai, *On generalized fractional integrals*, Taiwanese J. Math. **5** (2001), 587–602.
- [4] E. Nakai, *On generalized fractional integrals in the Orlicz spaces on spaces of homogeneous type*, Sci. Math. Jpn. **54** (2001), 473–487. (Sci. Math. Jpn. Online **4** (2001), 901–915).
- [5] E. Nakai, *On generalized fractional integrals on the weak Orlicz spaces,  $BMO_\phi$ , the Morrey spaces and the Campanato spaces*, Proceedings of the Conference on Function Spaces, Interpolation Theory, and related topics in honour of Jaak Peetre on his 65th birthday, Lund University, Sweden, to appear.